平成 28 年度学力育成推進事業
教科リーダー養成・活用事業

研修成果報告書　資料

島根県立大田高等学校
数学科　森脇　健二

目次

$\boxed{\text{課題A}}$

$\log_{10}10^9$，$\log_{10}10^{10}$，$\log_{10}3^{20}$ の値を求め，大小を不等号を用いて表せ。ただし，$\log_{10}3$ の値は常用対数表を用いること。

－－

課題B

$\log_{10} A < \log_{10} B < \log_{10} C$　のとき A , B, C の大小を不等号を用いて表せ。

$\log_{\frac{1}{10}} D < \log_{\frac{1}{10}} E < \log_{\frac{1}{10}} F$ のとき D , E, F の大小を不等号を用いて表せ。

課題C

10^9，10^{10} は何桁の数か求めよ。

$10^9 \leqq N < 10^{10}$ を満たす N は何桁の数か求めよ。

$\boxed{\text{課題}}$

3^{20} は何桁の数か求めよ。ただし, $\boxed{}$ とする。

3年　数学B　平面上のベクトル

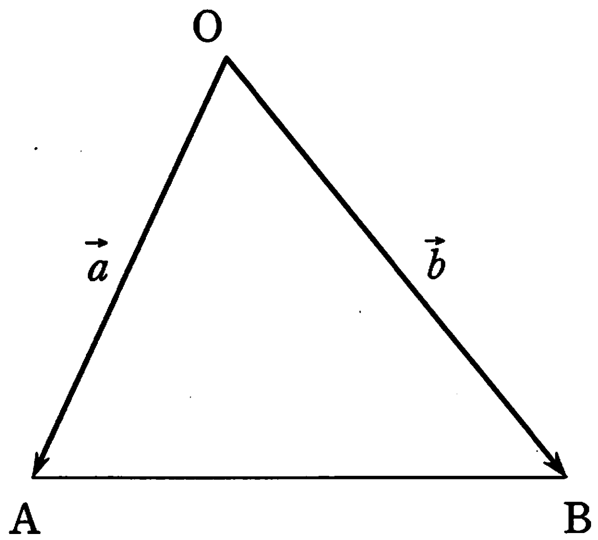
3年(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

本日の課題

△OABにおいて，辺OAの中点をC，辺OBを2:1に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

STEP1（課題提示）

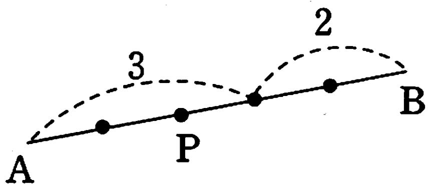
※問題文を下の図に図示して，自力で考えてみよう。



STEP2（エキスパートA）　“内分”に関するエキスパート　1

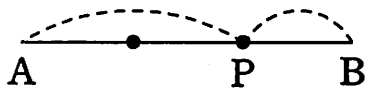
1. 線分の内分

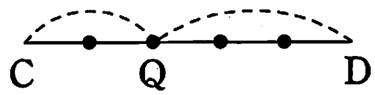
点Pが線分AB上にあって「AP : PB＝m:n」が成り立つとき，点Pは線分ABをm:nに$\boxed{\text{内分する}}$という。
右の図は，「AP : PB＝3:2」に内分する点Pを表している。

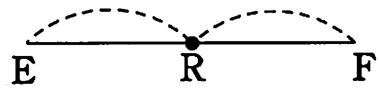


問1　次の線分は○ : △に内分しているか調べよ。

(1) AP : PB＝＿＿＿ : ＿＿＿　　(2) CQ : QD＝＿＿＿ : ＿＿＿　　(3) ER : RF＝＿＿＿ : ＿＿＿







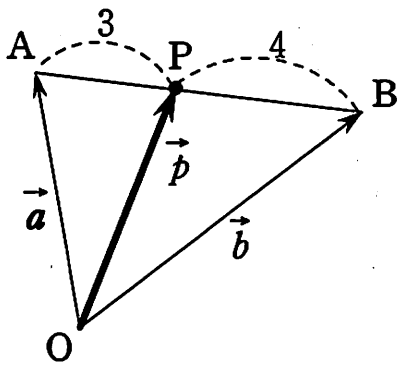
※(3)のように＿＿＿ : ＿＿＿に内分される点Rを「**中点**」という。

2. 位置ベクトルを利用した内分

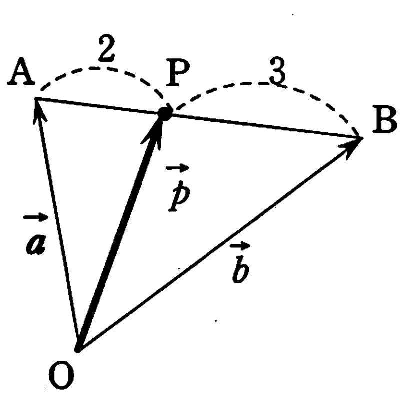
2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$を結ぶ線分ABをm:nに内分する点Pの位置ベクトル$\vec{p}$は，$\boxed{\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$　である。

例　2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$に対して，線分ABを3 : 4に内分する点Pの位置ベクトル$\vec{p}$は，

$$\vec{p}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$$

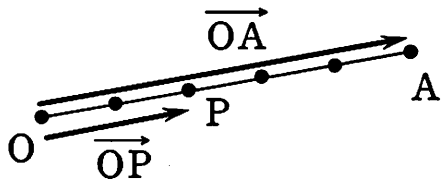


問2　2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$に対して，線分ABを2 : 3に内分する点Pの位置ベクトル$\vec{p}$を求めよ。



3．直線上の点

異なる2点O，Aがあり，直線OA上に点Pがあるとき，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}$となる実数$k$がある。

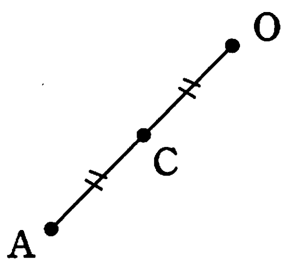


例　右の図のように，線分OA上に点Pがあり，
点Pは線分OAを2：3に内分している。
このとき$\overrightarrow{OP}$を，$\overrightarrow{OA}$を用いて表すと，

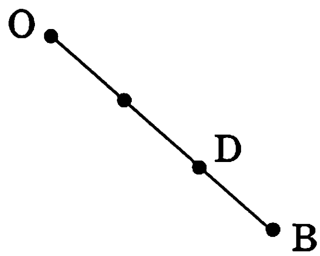
$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{2+3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$$

問3　次の各線分について答えよ。

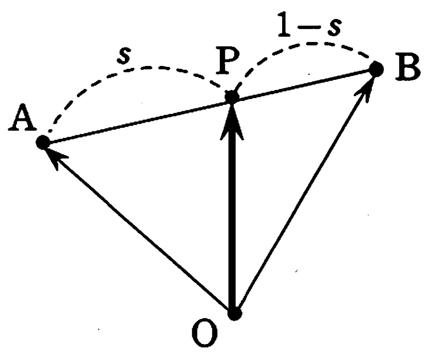
(1)　線分OA上に中点Cがある。
$\overrightarrow{OC}$を$\overrightarrow{OA}$を用いて表せ。



(2)　線分OBを2：1に内分する点Dがある。
$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。



4．ベクトルと図形（線分の内分）



線分ABの長さを1とする。線分AB上に点Pをとった場合，APの長さを「s」とすると，PBの長さは，「$1-s$」となる。($0\leqq s\leqq 1$) よって点Pは，**線分ABを「$s:1-s$」に内分**していることになる。このとき，点Oを始点とする位置ベクトルについて，

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}}$$

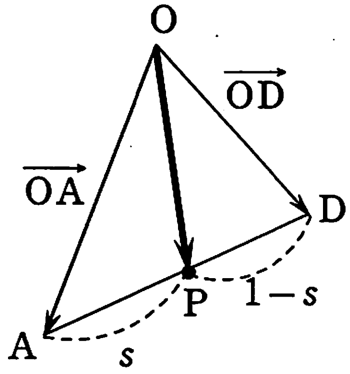
が得られる。(右図)

ここで注意として，

① 線分ABの長さを「1」としたが，長さが「1」でなくても，比で考えることで，どんな長さも「1」として考えることができる。

② この場合に使う文字は「s」でなくてはいけないという決まりは無く，「t」や「u」などを使うこともある。

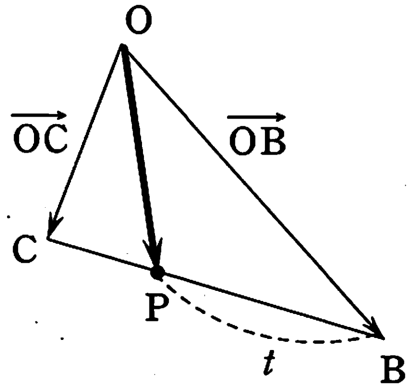
例 右の図のように線分AD上に点Pがあり，APを「s」($0 \leqq s \leqq 1$)とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$，sを用いて表す。



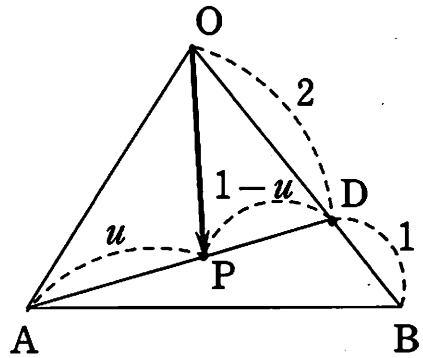
AP : PDを考えると，APが「s」より，PDは「$1-s$」となる。よって，AP : PD$=s:1-s$ より，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

問4 右の図のように，線分BC上に点Pがあり，BPを「t」($0 \leqq t \leqq 1$)とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，tを用いて表せ。



問5 △OABにおいて，辺OBを2:1に内分する点をDとする。また，線分AD上を$u:1-u$に内分する点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，次の問に$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて答えよ。



(1) $\overrightarrow{OD}$を表せ。

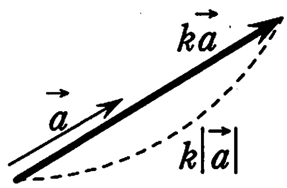
(2) $\overrightarrow{OP}$を表せ。

1．ベクトルの実数倍

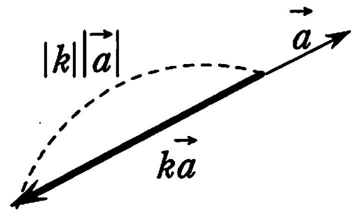
実数kとベクトル$\vec{a}$に対して，$\vec{a}$のk倍のベクトルを「$k\vec{a}$」を次のように定める。

(1)　$\vec{a} \neq 0$のとき，

①$k>0$ならば，$\vec{a}$と同じ向きで，
大きさがk倍のベクトル



②$k<0$ならば，$\vec{a}$と逆向きで，
大きさが$|k|$倍のベクトル

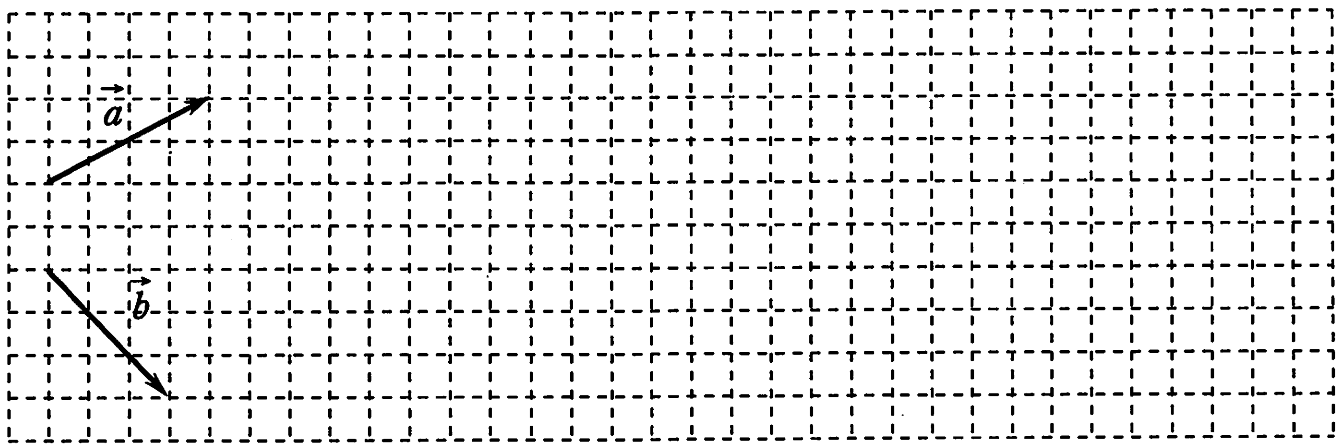


③$k=0$ならば，零ベクトル($\vec{0}$)

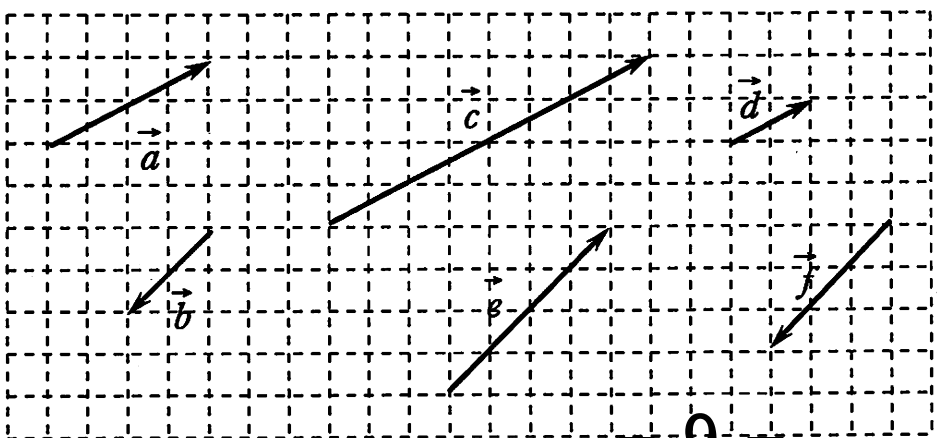
(2)　$\vec{a}=0$のとき，どんなkに対しても$k\vec{0}=\vec{0}$とする。

問1　図のようにベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が与えられているとき，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}\vec{a}$　　(3)　$-3\vec{a}$　　(4)　$-\dfrac{2}{3}\vec{a}$



問2　図にベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が与えられているとき，次の□に当てはまる数を書け。



(1)　$\vec{c}=\boxed{}\vec{a}$

(2)　$\vec{d}=\boxed{}\vec{a}$

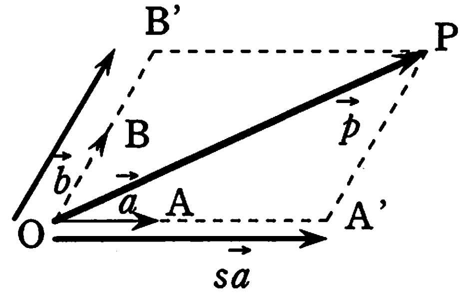
(3)　$\vec{e}=\boxed{}\vec{b}$

(4)　$\vec{f}=\boxed{}\vec{b}$

2．ベクトルの分解

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が平行でないとき，どんなベクトル$\vec{p}$も，$\vec{a}$，$\vec{b}$と適当な実数s，tを用いて，右の形に**ただ1通り**に表すことができる。 ⟶ $\boxed{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$

証明　次の□に適切な文字を記入せよ。



右の図のように，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$とする。
また点Pを通り，直線OB，OAに平行な直線と，直線OA，OBとの交点を，それぞれA’，B’とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\boxed{}\quad\cdots①$$

となる。

ここで，点A’は直線OA上に，点B’は直線OB上にあるので，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\boxed{}\,\boxed{\overrightarrow{}}$を満たす実数$s$，$t$がただ1組ある。この式を①に代入すると，

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

つまり，

$$\vec{p}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$$

例　$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(1,3)$のとき，$\vec{c}=(8,9)$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$とすると，

$(8,9)=s(2,1)+t(1,3)$

$\quad=(2s,s)+(t,3t)$

$\quad=(2s+t,s+3t)$

よって，$8=2s+t$，$9=s+3t$

これを解いて，$s=3$．$t=2$

したがって，$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$

問3　$\vec{a}=(3,5)$，$\vec{b}=(-2,3)$のとき，$\vec{c}=(0,19)$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

3．ベクトルの1次独立

定義　ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が1次独立であるとは，s，tを実数とすると， $s\vec{a}+t\vec{b}=0 \iff s=t=0$

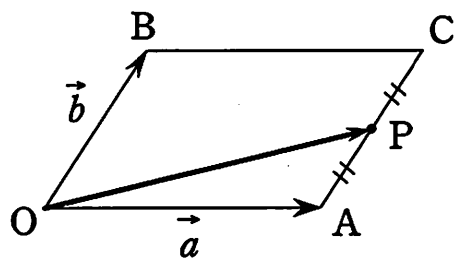
※ここまでに学んだことを整理すると，

①どんなベクトルも，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$の形にただ1通りで表せる

②ベクトルは$\vec{a}$，$\vec{b}$が1次独立である

以上のことから，次のことが分かる。

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$　ならば　$s=s'$，$t=t'$ ※1つのベクトルは1つの形で表されるので，係数（sやt）が異なる値をとることは無い。



例　右の図のように平行四辺形OACBがあり，線分ACの中点をPとする。このとき$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とし，$\overrightarrow{OB}=\vec{p}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて2通りで表す。

①　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$　とすると，

$=\underline{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$

②　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$　とすると，

$=\vec{b}+\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\underline{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$

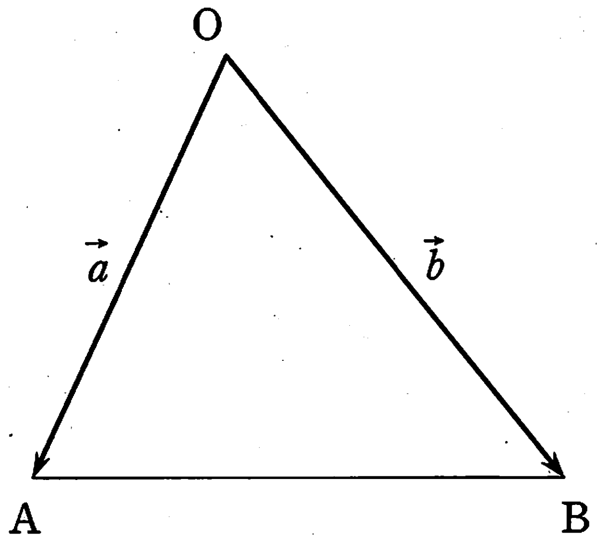
①②より，異なるルートでベクトル$\overrightarrow{OP}$を表したとしても，$\vec{a}$の係数は「1」，$\vec{b}$の係数は「$\frac{1}{2}$」であり，同じベクトルが得られ，ただ1通りであることが分かった。

例　ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$があり，ベクトル$\vec{p}$が①：$\vec{p}=t\vec{a}+3\vec{b}$と②：$\vec{p}=2\vec{a}+(1-s)\vec{b}$の2通りで表されていた。ここで，$t$，$s$は実数である。このとき，$t$の値を求める。

2通りのベクトルの係数比較をすると，$\vec{a}$の係数は①は「t」，②は「2」より，$\underline{t=2}$が分かる。

問4　上の例における，sの値を求めよ。

STEP3（ジグソー活動） みんなと協力して考えてみる。



STEP4（クロストーク活動）　発表を聞いて分かったことや疑問点のメモをとろう！

STEP5（まとめ）　今日の授業の学習した点や疑問点を，自分の言葉でまとめてみよう！

※ 次の問いに挑戦してみよう！

△OABにおいて，辺OAを3:2に内分する点をC，辺OBを1:2に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

1　「対数」とは 何か！？

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　）

問題　「対数」とは何ですか？ 説明してください。

2-A　「対数」って　どんな数 ??

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　）

まず、次の例を見てみよう。

$\boxed{\text{例}}$　次の□の中にあてはまる値を求めなさい。

（1）　$2 = 2^{\square}$　→　（答）　1　（　２は、２を１乗したもの　）

（2）　$4 = 2^{\square}$　→　（答）　2　（　４は、２を２乗したもの　）

（3）　$8 = 2^{\square}$　→　（答）　3　（　８は、２を３乗したもの　）

（4）$16 = 2^{\square}$　→　（答）　4　（　16は、２を４乗したもの　）

いかがでしょうか？
それほど難しくはなかったと思います。

今度は、次の問に答えてみてください。

$\boxed{\text{問}}$　次の□にあてはまる値を求めなさい。

$$2 = 2^1$$

$$3 = 2^{\square}$$

$$4 = 2^2$$

※　あなたが予想する答え　⇨

（答）　記入欄

※　同じグループの全員が、答えを記入したことを確認したら、裏へ進んで下さい。

正解は、

$$\square = 1.5849625007212\cdots\cdots\cdots\cdots$$ です。

これは、ちょっとどころか、かなり扱いにくい……（ ちょうどよい数ではないため ）

なぜなら、

$$3 = 2^{1.5849625007212\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

となってしまうから。（長い、バランスが悪い、書くのが大変）

そこで、もっと簡単な形にしたい！！
と、数学者が考えた結果、次のような記号で表すことにした！

> $M = a^{\square}$ の□にあてはまる値を、$\log_a M$（ログ エー の エム）と表し、これを **対数**（たいすう）と呼ぶ。
>
> したがって、$M = a^{\log_a M}$ と表せる。（ M は、a を $\log_a M$ 乗 したもの ）

※ 単に、 log (ログ) を、対数と呼ぶこともある。

この表し方を利用すれば、

$$3 = 2^{\log_2 3}$$

（3 は、 2 を $\log_2 3$（ログ２の３） 乗 したもの）

と書けて、だいぶ スッキリした感じ になる。
（ ちょうどよい数がないので、代わりに log という記号を用いたのである ）

問 計算をするときに、「対数（log）」を用いることの 良さ（メリット） とは何だろうか。

2-B 「対数（たいすう）」は、なぜ誕生したのか

2年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　）

（表はさらっと読み進めて下さい）

　みなさんは、ジョン・ネイピア（1550～1617）という人物を知っていますか？
　ネイピアは、「対数（log）」を発見した人として名を残したスコットランドの数学者です。

１６世紀、大航海時代の幕が開けたころ、航海技術はまだ十分なものではなく、海難事故はあとを絶たず、多くの命が失われました。
　航海を安全なものにするには、船の位置を正確に知る必要がありました。その位置や時刻は、天文学者らが星の動きを観察して計算していました。

　電卓やコンピュータのない時代に、ケタが長い大きな数のかけ算や大きな指数の計算をしなければならず、その膨大な計算量に、天文学者たちはとても苦しめられました。
　まさに、「天文学的な計算」に悲鳴をあげていたのです。

　そんなとき、ネイピアは複雑な計算をカンタンにするための方法を考えました。

・・・それが　「対数」　です。

　その当時では本当に考えられないような大発見でした。
「骨折り（苦労）を少なくして、天文学者の生命を２倍にした」と言われるほどで、天文学や航海術の計算を楽にしてくれたのでした。

では実際に、「対数」の考え方を使うとどれだけ計算を楽にしてくれるのでしょうか。

簡単な例として、1.16×1.43 の計算をするとき、あなたならどうしますか？

（裏へ進んでください）

問　1.16 × 1.43 を計算し、小数第２位まで求めなさい。

（いつもの計算）

①筆算をする

```
     1.1 6
   ×1.4 3
   -------
     3 4 8
   4 6 4
 1 1 6
 ---------
 1.6 5 8 8
```

②小数第３位を四捨五入して

$1.6\cancel{5}\cancel{8}\cancel{8} \fallingdotseq 1.66$（6）

（答え）1.66

（「対数」を利用した計算）

①表から値を調べる。

1.16 → ［1.1］と［6］に分け、
表の 1.1 と 6 の
ぶつかる場所を見る

⇩

$\boxed{.0645}$ ＝ 0.0645 である

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967

1.43 → 同様に 1.4 と 3 に分け
表のぶつかる場所を見る

⇩

$\boxed{.1553}$ ＝ 0.1553 である

「対数」の考えがつまったこの表を使うと
小数の<u>かけ算</u>をせずに、
<u>たし算</u>をすればよい！

②求まった値を足し合わせる。

$0.0645 + 0.1553 = 0.2198$

③足し合わせた値に「最も近い値」を表から探す。

.2198 に近い値　……　$\boxed{.2201}$

⇩

1.6 と 6 のぶつかる場所

数	0	1	2	3	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945

つなげて

（答え）1.66

※この表を「対数表」と呼ぶ。これを使うと

小数などの**複雑なかけ算** を **簡単なたし算** に変えることができ、 計算が楽になる。

問　なぜ「対数」という数が生み出されたのでしょうか？
また、「対数表」を使うと計算はどう変わりますか？

2-C 身のまわりにある「対数（たいすう）」

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　）

あなたの身のまわりに起こっている多くの現象には、数学が隠れています。

「対数（log）」が関係していることがらとしては、以下があります。

例
- 地震の規模（マグニチュード）
- 星の明るさの違い（等級）
- 液体の酸性・アルカリ性の度合いを表す pH（ピーエイチ）
- 古代の遺跡から発掘された土器が、いつ頃の年代に作られたものかを測定する際の計算法（炭素年代測定法）
- 音の大きさを表す単位である dB（デシベル）　など

それでは、ここで問題です。

問　右の表は、いったい何を表しているのでしょうか。

① 地震の規模とエネルギー

② 星の等級と明るさ

③ 発掘された土器がつくられた年代

④ 音の大きさと音階

M	E
4.0	630 957
5.0	19 952 623
6.0	630 957 344
7.0	19 952 623 149
8.0	630 957 344 480
9.0	19 952 623 149 689

※ あなたが予想する答え ⇒ （答）　記入欄

※　同じグループの全員が、答えを記入したことを確認したら、裏へ進んで下さい。

正解は、　　①　　です。

この表の
　M は　マグニチュード（規模）、
　E は　エネルギー
を表しています。

値に着目すると
　M が ＋１ずつ 大きくなるにつれて
　E は 約 32 倍 になっています。

そして、これら M，E の間には

M	E ［$\times 10^5$ ジュール］
4.0	630 957
5.0	19 952 623
6.0	630 957 344
7.0	19 952 623 149
8.0	630 957 344 480
9.0	19 952 623 149 689

+1　+1　+1　+1　+1

× 32　× 32　× 32　× 32　× 32

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$ が成り立っています。

このように、地震という現象を捉えるのに「対数（log）」を用いています。

　平成 23 年３月 11 日、日本で発生した「東日本大震災」を覚えていますか。
　この超巨大地震のマグニチュードは 9.0 という大きな値でした。

M	E ［$\times 10^5$ ジュール］
5.0	19 952 623
⋮	⋮
9.0	19 952 623 149 689

+4

$\times 32^4$

　日頃はっきりと感じる地震のマグニチュードが 5.0 だとすると、東日本大震災はさらに+4 したもの、ということになります。
　一方、エネルギーは約 32^4 倍、すなわち約１００万倍にもなり、どれだけ大きな地震だったのかが数字の上でもわかりますね。

問　身のまわりにある「対数」には、どんなものがありますか？

また、地震のマグニチュードとエネルギーの増え方はどのようになっていますか？
記号（+、−、×、÷ など）を□に入れてみよう。

M が □ 1　だけ大きくなると、E は □ ３２　される。

3　学んだことを共有しよう♪

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

課題　（１）３つのエキスパートの内容について、Ａ・Ｂ・Ｃの順に、
大切だと思うところを 他の人に説明してください。

（２）説明を聞き、それぞれのエキスパートの内容を下にまとめておきましょう。

エキスパートＡの内容

エキスパートＢの内容

エキスパートＣの内容

（３）「対数」には、様々な側面があることが分かりました。まとめてみましょう。

※ 発表あり

「対数は、」「対数とは、」「対数には、」というような形で、書き始めてみてください。

4　「対数」とは 何か！？

２年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

問題　「対数」とは何ですか？ 説明してください。

1 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

・多い乗の計算を簡単にするもの。

4 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

対数とは、船の位置を求める時に使われていた複雑なかけ算を
簡単なたし算で求めることができるようにするために生まれた。
対数を用いることにより、小数などが続く大きく、長い、
スッキリしない数を、スッキリした形で表すことができる。
そして、その対数はマグニチュードの大きさを比べるときなど、
身近なところで使われている。
豆知識として、「対数」は、昔の天文学者の寿命を2倍にした。

（感想）

今回、このような話し合いをすることによって、けっこう身近なところで数学がすごく生きていることがわかった。他の分野のことも少し調べてみたいという気持ちになった。

（やってみたい派）

1 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

- $2^x=3$ など√を使って表せないものを log を使って表した数

4 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

- 昔、航海をするとき安全なものにするために星の動きを計算していたが複雑なかけ算だった。
  その時生まれたのが対数でこれを使うと複雑なかけ算が簡単なたし算にすることができた。
  また、$2^{□}=4$ などの計算のとき、□に2が入ることは分かるが
  $2^{□}=3$ と言われれば□にはとてつもなく長い数が入る。
  そんな時に対数は登場し□は $\log_2 3$ ($\log_a M$) と簡単に表すことができる。
  対数は数学の授業だけや航海する時に使われるだけでなく、
  地震の規模とエネルギーの関係を求める時など身近な生活の中でも使われている。

〈感想〉

- 1人で考えている時は考えも浮ばなかったけど、話し合いをして前よりは対数がどういうものか分かった気がするし、対数が今の生活やこの時代でどんな感じで役立っているのかも具体的に知れておもしろかった。
  数学で自分が習っているものが受験以外で必要ないという考え方が薄まったと思う。

- 今後、こんな活動をまたやってみたい。

1 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

- log を使って考える数
- $a^x = M \Longrightarrow \log_a M = x$
-

4 「対数」とは 何か！？

2年

問題 「対数」とは何ですか？ 説明してください。

- 大航海時代に天文学の複雑な計算を簡単にするために生まれた。
- どんな累乗も対数を使って表すことができる
- 対数は日常でも使われていて、マグニチュード(M)やpHなどにも使われている。 地震の規模の比率 わざわざ〜32倍しなくてよい
- 今までの計算が膨大すぎたため、対数は「天文学者の生命を2倍にした」とまで言われた。
- 対数を使うことで計算が楽になる。

感想

数学自体、数字や計算ばかりで、苦手意識がかなりあったけど、今回のように歴史や日常に使われているものなどを知るといっきに興味がわくものに変わって、楽しくなりました。班で活動するときも、あまり話すことのない人とも意見交換ができたり、雑談したりと仲よくなるきっかけにもなった気がします。高校は中学と比べてグループ活動が少ないけど、私はグループ活動の方が良いなと感じました。またやりたいです。

エキスパート活動　A

例として　$(x+2)(x-3)$の展開を考えよう。

分配法則を利用すると　（※１）$(x+2)(x-3)=x^2-3x+2x-6$

$=x^2-x-6$　となる。

ここで（※１）の変形の逆をたどると

$x^2-x-6=x^2-3x+2x-6$

$=(x+2)(x-3)$　となるので

$\boxed{x^2-x-6 \Longrightarrow (x+2)(x-3)\quad \text{と変形できる}}$　ことが確認できる。

このような変形を 因数分解 という。

例として　分数式の 和・差　$\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$　を考えよう。

分数式の和・差においては 通分 をして，分母をそろえてから計算をしていく。

よって　（※２）

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1\times(k+2)}{(k+1)\times(k+2)}-\frac{1\times(k+1)}{(k+2)\times(k+1)}$$

$$=\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

となる。

ここで　（※２）の変形の逆をたどると

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1\times(k+2)}{(k+1)\times(k+2)}-\frac{1\times(k+1)}{(k+2)\times(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

となるので

$\boxed{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} \Longrightarrow \dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\quad \text{と変形できる}}$　ことが確認できる。

一般に，

分母が因数分解された形で表される分数式は，それら因数を分母とする分数式の和・差に変形できる。

このような変形を **部分分数分解** という。

エキスパート活動　B

例として　$\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$ を考えよう。

重要な公式として

①　$\sum_{k=1}^{n} c = nc$　　②　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　③　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　などがある。

公式を利用すると

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = 4\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n = 2n^2+2n+3n = 2n^2+5n$$　となる。

このように，公式を利用して処理できることはとても重要である。

しかし

処理はできても，いったい何を求めたのか分からないのでは意味がない。

では，$\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$ は何をさしているのか。

Σ は和の記号である。$k=1$，n に注目し，$\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$ を具体的に書き出すと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(4k+3) &= (4\times1+3)+(4\times2+3)+(4\times3+3)+\cdots+(4\times n+3)\\ &= 7+11+15+\cdots+(4n+3)\end{aligned}$$

すると

これは，初項 7，公差 4 の等差数列の初項から第 n 項までの和を指していることが分かり，

Σ の公式を利用しなくても，初項 a，公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n について

公式　$S_n = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$　を利用して

$$\frac{1}{2}n\{2\times7+(n-1)\times4\} = 2n^2+5n$$　と求めることができる。

和の記号である Σ について，和を具体的に書き出すことで見えてくることもあるのである。

例として　初項-1，公比-1の等比数列$\{a_n\}$について初項から第23項までの和を考えよう。

初項から第n項までの和をS_n，初項a，公比rとして

$$\text{公式}\quad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\quad \text{を利用すると}$$

求める和は　$S_{23}=\dfrac{(-1)\times\{1-(-1)^{23}\}}{1-(-1)}=\dfrac{(-1)\times(1+1)}{2}=-1$　となる。

このように，公式を利用して処理できることはとても重要である。

しかし

このような数列の場合は
求める数列の和を具体的に書き出すことで，次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}S_{23}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21}+a_{22}+a_{23}\\&=(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)+1+(-1)\\&=\cancel{(-1)}+\cancel{1}+\cancel{(-1)}+\cancel{1}+\cdots+\cancel{(-1)}+\cancel{1}+(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

隣り合う項が打ち消し合い　最後に残った$a_{23}=-1$　が求める和　$S_{23}=-1$　となる。

公式利用だけでなく，数列の特徴を生かした解法もあるのである。

$\boxed{\text{課題}}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \text{ を求めよ。}$$

次の問いに答えよ。

（１）$\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}$　を通分して計算せよ。

（２）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+3)}$　を求めよ。

次の問いに答えよ。

（１）$\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}$　を通分して計算せよ。

（２）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+3)}$　を求めよ。

Ｐｒｅ課題

「微分・積分」とはなんですか？説明してください。

Ｐｏｓｔ課題

「微分・積分」とはなんですか？説明してください。

相手にきちんと伝わるように、文章だけでなく図などを用いてよい

ジグソー課題

「微分・積分」とはなんですか？説明してください。

相手にきちんと伝わるように、文章だけでなく図などを用いてよい

エキスパート活動Ａ

数学者・哲学者　ライプニッツ（1646～1716）

出身地	ドイツ
微積分学の発見方法	数を無限に分解するという観点から
論文発表	1675 年ごろ
活躍場所	ヨーロッパ全域

物理学者・数学者　ニュートン（1642～1727）

出身地	イギリス
微積分学の発見方法	力学的な観点から
論文発表	1687 年ごろ
活躍場所	イギリス

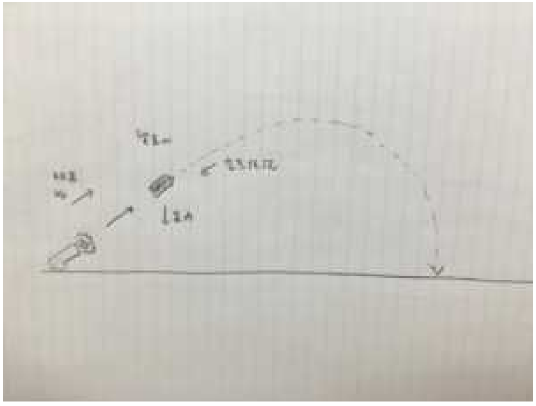
　ライプニッツとニュートンは、年の差わずか４歳の同世代に活躍した数学者です。２人はそれぞれ違った方法で微分積分を発見し、その研究を進めていました。そのため、互いの研究について特に干渉することはありませんでした。微分積分に関する論文はライプニッツが先に発表していますが、先に微分を発見したのは、実はニュートンの方であったと言われています。20 代前半の若さで微分を発見し、研究を重ねたニュートンでしたが、論文発表にとても慎重であったがために遅れをとり、発表に至ったのは彼が 40 代になってからでした。

　両者の研究が出揃っても、２人は互いに相手のことを気にしなかったようです。しかし、1695 年ごろにニュートンは『微分を先に発見した自分よりも、後から発見したライプニッツの方が草案者であるとの見方が世界で定着しつつある』ということを知りました。どうやら、①ライプニッツの方が先に論文を提出していること、②ライプニッツはヨーロッパ全域で幅広く活躍しており、ライプニッツの方法が広く世間に広まったこと、③使用している記号等が非常に分かりやすいこと、などが理由としてあったようです。このことに対してニュートンは少なくとも苦々しく感じたはずなのですが、自分からそのことを問題にすることはしませんでした。しかし、ニュートン派の学者たちは黙っていませんでした。『ライプニッツはニュートンのアイデアを盗んだのではないか』などの声をあげ、両陣営の論争は泥沼化し、歴史上でも有数の論戦に発展していきました。

　現在となってはその真相を確かめることはできませんが、ライプニッツが考え出した ｄｙやｄｘ、∫などの記号が、現在の高校数学で用いられていることを考えると、分かりやすさにおける軍配はライプニッツに上がったと見ることができるでしょう。しかし、ニュートンの考え方も物理学などへの応用が期待されるなど良い点が多く、その考え方は今でも大学数学等で学ばれています。

エキスパート活動Ｂ

微分積分が世の中に大きな影響を与えたのは 17 世紀。ニュートンが物理の計算に使いだしたのがきっかけになりました。ニュートンは主に天文学の研究に微分積分を使いましたが、産業革命と大砲の出現で「微分積分を使った物理」は”金のなる木”に変わります。大砲はどこに落ちるのかがより正確に分かるとなれば、それはとてつもない武器になります。研究者は競って研究を進め、その成果を高値で売ったのです。



　大砲を撃つとき、撃ち出す角度で距離の狙いを定めますが、その時にいろんな要因の影響を受けます。

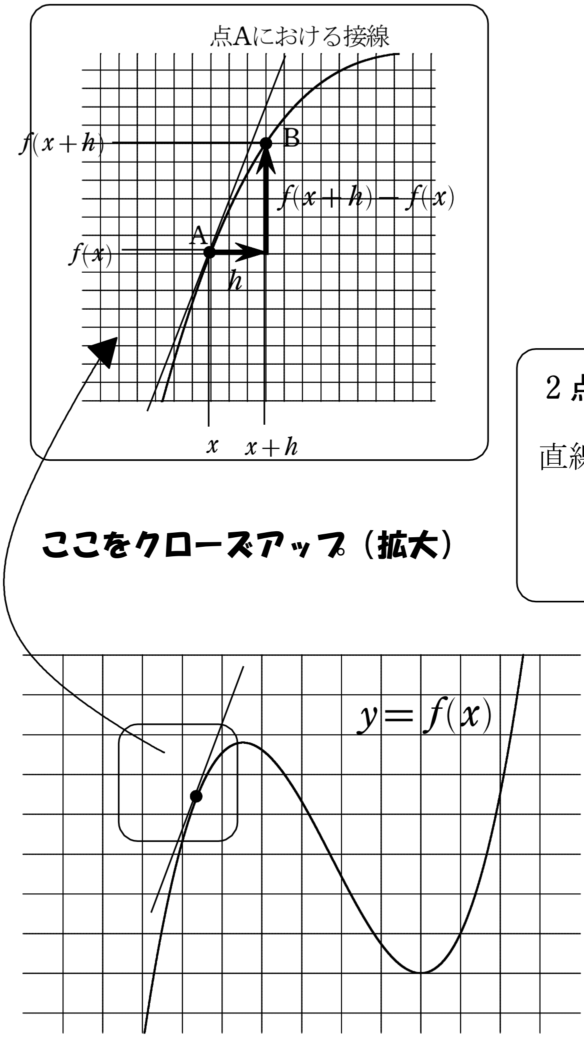
- 重力　　：だんだん落ちてくる。
- 空気抵抗：だんだん遅くなってくる。
- 弾の重さ：重いと初速が出にくい。
弾が軽いと空気抵抗の影響を受けやすい。
- 火薬の量：少ないと飛距離が出ない。
多いとお金がかかる＋暴発の危険性。

「で、どこに落ちるん？」というのを最初は勘と経験でやっていたのですが、計算で求まるとなると誰でもすぐに当てられるようになります。そこで計算方法を当時の科学者達が考えだしました。距離の時間当たりの変化量が速度で、速度の時間当たりの変化量が加速度ということから、時間ごとの変化量（微分）を出し、それを足し合わせる（積分）と距離が求まるという、まさに微分積分の計算方法を普及させていきました。「計算で予測できる」というのが他にも使える、ということで産業革命という時代と歩調を合わせて微分積分は発展していきます。また、計算方法は分かっても計算が大変ということから、計算機をはじめコンピューターも同時に大きく進歩していきました。大砲を撃つと「放物線を描いて飛んでいく」「放物線は２次関数のことだ」ということが浮かぶと思いますが、実際には上記のように空気抵抗など様々な要因があり、正確に考えるにはもっともっと複雑な関数を微積分する必要があることは想像つくでしょう。

　微分積分は,「ある時間からある時間までの間の変化」「あるところからあるところまでの間の変化」「いついつ，どこどこではこんなだった」という情報から、全体を把握しようとするものです。このことは身近な事柄に応用されています。例えば、建築物の耐震性は、建物を実際に壊すわけにはいきませんので、いくらかのデータをもとに微分積分の計算で求められています。電子体温計の測定は、実際に約 36℃まで温まるのを待っていては時間がかかりすぎるので、温度の上昇速度をもとに微分積分の計算で求められています。天気予報は、過去のたくさんのデータをもとに微分積分の計算で気温や降水確率を算出しています。飛行機は、より燃費を向上させるためにも機体は軽い方が望まれますが強度が失われてはいけません。安全に効率よく飛行するためには機体のどこをどのような素材を用いて作ればよいのか、またいつ頃どのような検査を行えばよいかを微積分の計算を用いて算出しています。このように微積分は世の中のあらゆるところで使われています。

エキスパート活動C

微分とは



微分発見の発端

接線の傾きが知りたい

↓

曲線上の 2 点を結んだ直線の傾きを考える

↓

2 点が近ければ近いほど誤差が少ないとわかる

結論

出来るだけ近い2点を結んだ直線の傾きを考えればよい

⬇ 直線ABの傾き

2 点 A(x , $f(x)$) , B($x+h$, $f(x+h)$) について

$$\text{直線ABの傾き} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

⬇ 直線ABの傾きの極限値 $h \to 0$

導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

⬇ $x=a$ 代入

微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$x=a$における接線の傾き ⟺ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

関数 $y=f(x)$ を微分するとは、その関数の導関数を求めることです。

微分することで微分係数が求まり、接線の傾きが求められます。

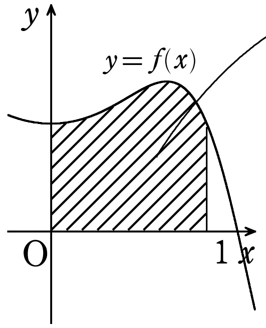
接線の傾きの変化を考えることは、そこから関数の値は増えていくのか、減っていくのかを考えることと同じです。

微分を用いることで、株価がそこから増えていくのか、減っていくのかを予測することも考えられます。

（もちろん株価は様々な要因によって変動するので、確実な予測をすることは出来ません⇒出来たらみんな大儲け）

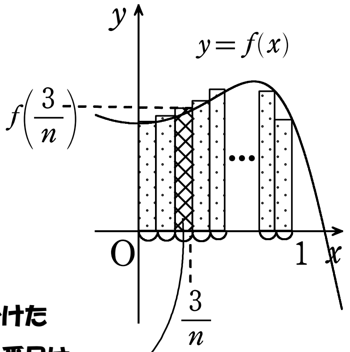
このように経済学でも微積分は活用されています。そう考えると経済学部は文系・理系どちらなのでしょう？

積分とは



積分発見の発端

なめらかな曲線で囲まれた領域の
正確な面積を求めたい
↓
底辺を n 等分した長方形の寄せ集めを考える
↓
n が大きければ大きいほど誤差が少ないとわかる



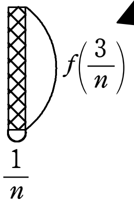
結論

出来るだけ細かく分けた長方形の面積の和を考えればよい

細かく（n 個に）分けた長方形の面積の和

$$\underline{f\left(\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}}+\underline{f\left(\frac{2}{n}\right)\times\frac{1}{n}}+\underline{f\left(\frac{3}{n}\right)\times\frac{1}{n}}+\cdots+\underline{f\left(\frac{n}{n}\right)\times\frac{1}{n}}$$

n個に分けた
左から3番目は



【面積（縦）×（横）】

$$\underline{f\left(\frac{3}{n}\right)\times\frac{1}{n}}$$

★ ライプニッツの考え

$$\underline{f\left(\frac{1}{n}\right)\times dx}+\underline{f\left(\frac{2}{n}\right)\times dx}+\underline{f\left(\frac{3}{n}\right)\times dx}+\cdots+\underline{f\left(\frac{n}{n}\right)\times dx}$$

◆ ライプニッツの考え

面積は

$$\int_0^1 f(x)\times dx \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$$

と表記する

<u>後に、これは微分の逆演算と分かる</u>

ライプニッツの考え

出来るだけ細かく分けるとは $n\longrightarrow\infty$ **ということだけど**

（横）$=\frac{1}{n}$ **が微かになるから、それを**

★ **（横）**$=\frac{1}{n}=dx$ **（微かな横幅）と表記しよう！**

◆ **無数の長方形の和を表す記号として** $\int$ **という記号を使おう！**

積分とは、微分の逆のことということが知られ、微分→積分の順に学ぶことがほとんどです。まるで微分が発見されたのち、逆演算として積分が発見されたように思われていますが、積分の基盤となる考えは紀元前1820年頃（ピラミッドができた頃）からなされたとされています。微分の発見時期と比べるとずっと昔のことです。

上記のように、積分は面積という、微分とは全く関係のない観点から考えられました。その後の研究で『限りなく〇〇に近づける…』という極限の考えが微分の考え方とつながり、逆演算の関係性が発見されたというのが歴史的な流れです。しかし、実際は微分の計算の方が積分の計算よりも分かりやすいということから、微分→積分の順に学ぶのです。

数学科学習指導案

1　日時　　　　平成 28 年 9 月 9 日（金）　第 5 限

2　指導者　　　森脇健二

3　学級　　　　第 2 学年

4　教材　　　　数研出版　新編　数学Ⅱ

5　単元名　　　第 5 章　指数関数と対数関数　5.常用対数

6　単元について

（1）教材観

指数関数，対数関数は，数学において重要なだけでなく，自然科学や社会科学など多くの分野でも取り扱われており，身近な事象を考察するのに役立っている。特に対数関数は指数関数の逆関数という印象が強いが，対数は桁数の大きな数を必要とする測量や天文の分野において，積や商を求める数値計算を能率的に行うことができる有用性の高いものである。

（2）生徒観

（3）指導観

指数関数，対数関数は，三角関数とともに，数学においては基本的な関数であるが，生徒にとっては理解しにくいものである。1 次関数や 2 次関数のように値の計算が簡単にできないことに加え，累乗根や log の記号に抵抗感があるからだと思われる。指数関数と対数関数は逆関数であることを押さえて関連付けつつ，それぞれの性質を活用できるように指導していく。その上で，計算能力を身に付けることだけにとらわれず，身近な事象をとおして対数の有用性を感じられるようにしていきたい。

7　単元の目標

指数関数と対数関数について理解し，それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。

8　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
指数関数と対数関数に関心を持ち，その定義や特徴を理解するとともに，それらを具体的な事象の考察に活用しようとする。	指数関数と対数関数における数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考えることができる。	指数関数と対数関数の性質を活用して，事象を数学的に考察し，表現・処理する仕方を身に付け，問題を解決することができる。	指数関数と対数関数の定義，性質，用語・記号などを理解し，基礎的な知識を身に付けている。

9　単元の指導計画（全 15 時間）

1.	指数の拡張	3 時間	4.	対数関数	2 時間
2.	指数関数	3 時間	5.	常用対数	2 時間（本時はその 2 時間目）
3.	対数とその性質	2 時間		問題演習	3 時間

10　本時の指導計画

(1) 指導の目標

ジグソー法を用いた活発なグループ活動をとおして，「常用対数を用いて自然数の桁数が求めることができる」ということを理解する。

(2) 評価の観点

① 常用対数に関心を持ち，それを課題解決に活用しようとしている。【関・意・態】

② 常用対数を用いて自然数の桁数を求める過程を理解している。【知・理】

(3) 評価の具体

●十分満足できると判断される生徒の具体例

① グループ活動に意欲的に参加している。

② 対数の性質を理解し，常用対数を用いて自然数の桁数を求める過程を他の生徒に説明できる。

●支援が必要とされる生徒への指導の手立て

① エキスパート活動と教科書の例題の関連性について助言する。

② 他の生徒の説明を参考に自分の言葉で説明できるように助言する。

11　本時の展開

	学習活動	指導上の留意点・評価
	●本時の目標を聞き，ジグソー法を理解する。	本時の目標を提示する。
5分		ジグソー法の説明を行う。
	●エキスパート活動5分	【評価①】
	A　別紙	A～Cのエキスパート同士は協力してよいことを伝える。
	B　別紙	
10分	C　別紙	
	●ジグソー活動15分	【評価①②】
	課題を考える。	
	①各自エキスパート内容の説明	①全員が話す機会を設ける。
	②課題考察	
	③解答例の作成	③答えだけでなく満点の解答を心掛ける。
25分	④発表練習	④誰もが説明できるようにする。
	●発表2分	
	指名された班は解答例を板書する。	
	指名されなかった班は，2 班ごとに発表班と聞き手班に分かれ，交互に発表を行う。	
30分		
	指名された班が全体に発表する。	
40分		
	●練習26　27，補充9を解く。	自席に戻り個々に取り組ませる。
47分		
	●本時のまとめ	次回は練習26　27，補充9について解説を行うことを告げる。
50分	次回の予告を聞く	

数学科学習指導案

1　日時　　　　　　平成 28 年 12 月 15 日（木）　第 3 限

2　指導者　　　　　森脇　健二

3　学級　　　　　　第 2 学年

4　教材　　　　　　数研出版　新編　数学 B

5　単元名　　　　　第 3 章　数列　第 2 節　いろいろな数列　8.いろいろな数列の和

6　単元について

（1）教材観

数列は，三角数や四角数のように古くから関心がもたれ，いろいろと研究がなされてきた。現在でも，フィボナッチ数列や複利計算のように，数列は自然科学や社会科学などの分野においてしばしば取り扱われる重要なものである。小学校・中学校においても，カレンダーなど身近にある数列を扱い規則性を考えさせることがある。ここではその応用として文字や記号を多用しながら内容を深めていく。また，積分の区分求積法において級数の考えを用いたり、確率において漸化式の考えを用いたりするなど，他分野とのつながりもある単元である。

（2）生徒観

（3）指導観

数列では，数字の並びから規則を発見すること，漸化式を用いて規則を表現すること，初期条件と規則から一般項を求めること，和を求めること，など様々なことを学習する。添え字に数値を代入して数列を具体的に書き出すなどの基本を徹底することをはじめ，一般項や漸化式，Σなど，式や記号の意味をきちんと押さえることで，複雑な規則をもつ数列においても処理ができるように指導したい。様々な処理ができる能力を身に付けさせるだけでなく，身近にある数列を扱いながら公式の有用性や，解法に至る過程の美しさなどを感じられるようにしていきたい。

7　単元の目標

簡単な数列とその和及び漸化式と数学的帰納法について理解し，それらを事象の考察に活用できるようにする。

8　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
等差数列や等比数列の一般項やその和について興味・関心をもち，取り組む。数列に関わる新しい用語・記号を理解しようとする。	数列の一般項やその和を求める数学的な思考過程を発展的に捉えることができる。和の記号Σのよさや階差数列などの見方・考え方がわかる。	数列の特徴を理解し，一般項やその和を求める公式を適切に活用し，表現することができる。記号Σの性質や階差数列の考え方を理解し，適切に活用することができる。	与えられた数列を適切に分類し，活用するべき公式を理解している。数列に関わる新しい用語・記号の扱いを理解している。

9　単元の指導計画（全28時間）

1.	数列と一般項	1時間	6.	和の記号Σ	2時間
2.	等差数列	2時間	7.	階差数列	2時間
3.	等差数列の和	2時間	8.	いろいろな数列の和	5時間（本時はその4時間目）
4.	等比数列	2時間	9.	漸化式	3時間
5.	等比数列の和	2時間	10.	数学的帰納法	3時間
				問題演習	4時間

10　本時の指導計画

（1）指導の目標

数列の和を求める上で部分分数分解を用いることの有用性を，ジグソー法を用いた活発なグループ活動をとおして理解する。

（2）評価の観点

①　エキスパート課題に関心を持ち，それを課題解決に活用しようとしている。【関・意・態】

②　部分分数分解を用いて数列の和を求める過程を理解している。【知・理】

（3）評価の具体

●十分満足できると判断される生徒の具体例

①　グループ活動に意欲的に参加している。

②　部分分数分解を用いて数列の和を求める過程を他の生徒に説明できる。

●支援が必要とされる生徒への指導の手立て

①　エキスパート活動と課題の関連性について助言する。

②　他の生徒の説明を参考に自分の言葉で説明できるように助言する。

11　本時の展開

時間	学習活動	指導上の留意点・支援・評価
3 分	●本時の目標を聞き，ジグソー法を理解する。	本時の目標を提示する。ジグソー法の説明を行う。 **『数列の和を求めることができる』** **『新たな発見をする』**
	●Pre 課題に取り組む（3 分）	
15 分	●エキスパート活動（個 3 分+集団 5 分） A　別紙 B　別紙 C　別紙	【評価①】 集団においては A～C のエキスパート同士協力してよいことを伝える。 各資料のタイトルを決めさせる。
25 分	●ジグソー活動 7 分 課題を考える。 ①各自エキスパート内容の説明 ②課題考察 ③解答例の作成 ④発表練習	【評価①②】 ①必ず全員が話す機会を設けさせる。 ②教員は考察内容について原則言及することはしない。 ③答えだけでなく，よりよい解答を心掛けさせる。 ④誰もが説明できるように指示する。
30 分	●ギャラリーウォーク 5 分 各班説明役を 1 人決め，残りは他の班の説明を自由に聞きに行く。	発表者に対して良かった点を伝えるよう指示する。
35 分	●ジグソー活動 5 分	他の班の良かった点を踏まえて改良するよう指示する。
40 分	●ギャラリーウォーク 5 分 各班説明役を 1 人決め，残りは他の班の説明を自由に聞きに行く。	説明役は違う生徒になるように配慮する。
47 分	●Post 課題に取り組む 7 分	初めの自席に戻り，個で取り組ませる。 最後に Post 課題の答えのみ伝える。
50 分	●本時のまとめ 次回の予告を聞く	次回は他の班の資料活用しながら Post 課題，教科書の例題・練習問題について考察していくことを告げる。

数学科学習指導案

1　日時　　　　　　平成 29 年 3 月 14 日（火）　第 5 限

2　指導者　　　　　森脇　健二

3　学級　　　　　　第 2 学年

4　教材　　　　　　数研出版　新編　数学Ⅲ

5　単元名　　　　　第 6 章　微分法の応用

6　単元について

（1）教材観

導関数を利用すると，関数の増減がわかり，変化の様子を調べることができる。それにより，関数のグラフをかいたり，あるいは，ある範囲での関数の最大値や最小値を求めたりすることができる。数学Ⅱでも微分について学習はしているが，関数の増減に関する基礎的な理論については学習していない。これまで直観的に理解していた事柄をある程度論理的に把握させていく。

（2）生徒観

（3）指導観

この単元では数学Ⅱでは扱わなかった複雑な関数を扱うことになる。第 1 次導関数に加えて第 2 次導関数を考えることで，複雑な関数のグラフの凹凸を踏まえながら概形をかくことができる。これは生徒にとって感動的な場面になると思われる。また，微分法の起こりである速度・加速度などの物理的な内容を扱うことで微分法をさらに深めることができる。身近な事象と関連する事柄や，微積分の起源に関連する事項に触れるなどして，全員の意欲関心が高まるように指導していきたい。

7　単元の目標

微分法についての理解を深めるとともに，その有用性を認識し，事象の考察に活用できるようにする。

8　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
微分法に関心をもつとともに，それを事象の考察に積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。	事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどをとおして，微分法における数学的な見方や考え方を身に付けている。	微分法において，事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	微分法における基本的な概念，原理・法則などを体系的に理解し，知識を身に付けている。

9　単元の指導計画（全 17 時間）　　本時はこの単元の導入　1 時間

1．接線の方程式　2 時間
2．平均値の定理　1 時間
3．関数の値の変化　3 時間
4．関数のグラフ　3 時間
5．方程式，不等式への応用　1 時間
6．速度と加速度　1 時間
7．近似式　1 時間
問題演習　4 時間

10　本時の指導計画

（1）指導の目標

ジグソー法を用いた活発なグループ活動で、「微分積分とは何か」を考えることによって、形式的な計算方法だけでなく、微分積分の概念やそのよさを理解する。

（2）評価の観点

① エキスパート課題に関心を持ち，それを課題解決に活用しようとしている。【関・意・態】
② 微分積分の概念やそのよさを理解している。【知・理】

（3）評価の具体

●十分満足できると判断される生徒の具体例
① グループ活動に意欲的に参加している。
② 微分積分の概念やそのよさを他の生徒に説明できる。

●支援が必要とされる生徒への指導の手立て
① エキスパート活動と課題の関連性について助言する。
② 他の生徒の説明を参考に自分の言葉で説明できるように助言する。

11　本時の展開

	学習活動	指導上の留意点・支援・評価
3 分	●本時の目標を聞き，ジグソー法を理解する。	本時の目標を提示する。ジグソー法の説明を行う。 **『微分積分について理解を深める』** **『新たな発見をする』**
	●Pre 課題に取り組む（3 分）	
15 分	●エキスパート活動（個 3 分+集団 3 分） A　別紙 B　別紙 C　別紙 D　別紙	【評価①】 集団においては A～D のエキスパート同士協力してよいことを伝える。 各資料のタイトルを決めさせる。
20 分	●ジグソー活動 5 分 課題を考える。 ①各自エキスパート内容の説明 ②課題考察 ③まとめの作成 ④発表練習	【評価①②】 ①必ず全員が話す機会を設けさせる。 ②教員は考察内容について原則言及することはしない。 ③より相手に伝わる表現を工夫させる。 ④誰もが説明できるように指示する。
27 分	●ギャラリーウォーク 5 分 各班説明役を 1 人決め，残りは他の班の説明を自由に聞きに行く。	発表者に対して良かった点を伝えるよう指示する。
35 分	●ジグソー活動 5 分	他の班の良かった点を踏まえて改良するよう指示する。
40 分	●ギャラリーウォーク 5 分 各班説明役を 1 人決め，残りは他の班の説明を自由に聞きに行く。	説明役は違う生徒になるように配慮する。
	●Post 課題に取り組む 7 分	初めの自席に戻り，個で取り組ませる。
47 分 50 分	●本時のまとめ 次回の予告を聞く	次回は他の班の資料活用しながら Post 課題についてまとめることを伝える。

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ を求めよ。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ を求めよ。

課題

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \text{ を求めよ。}$$

$S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ とおき，和を具体的に書き出すと

$$S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$$ より

この（等差）×（等比）の数列の和においても
等比数列のときと同じように公比をかけてずらして引くと

エキスパート活動　A

例として　$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を考えよう。

$S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ とおき，和を具体的に書き出すと

①　S　= $\boxed{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}}$ となる。

ここで，

各項の左側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公差 $\boxed{}$ の等差数列

各項の右側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公比 $\boxed{}$ の等比数列となっていることが分かる。

数列全体として，等差数列または等比数列をなしてはいないが，

このような数列の和を『**（等差）×（等比）の数列の和**』と呼ぶこととする。

左側にある等差数列の一般項は n ，右側にある等比数列の一般項は 2^{n-1} なので

②　$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$　　…　$\sum$ の公式より

③　$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$　　…　等比数列の和の公式より

これを用いると，

$$①=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} k\times\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=②\times③=\frac{1}{2}n(n+1)\times(2^n-1)$$

という考えが浮かぶ。

これは解答としてどうだろうか。結論から述べると，これは **誤り** である。

これについて考えていこう。⟹ 裏面へ続く

エキスパート活動　A

単純にするために $n=3$ として考えていく。

具体的に書き出して計算すると

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k\cdot 2^{k-1} = \boxed{} = \boxed{}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k = \boxed{} = \boxed{}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^{k-1} = \boxed{} = \boxed{}$

①の結果　　②×③の結果

$\boxed{} \neq \boxed{}$

となるので

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \neq \frac{1}{2}n(n+1)\times(2^n-1)$ であることが分かる。

①	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$	は「掛けていったもの」の和（足し算）
②×③	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$	は「足していったもの」の積（掛け算）

である。

これらは似ているようで全く違うものである。

これらの違いを理解せず等しいという思い込みのまま，誤った計算をしてはいけない。

エキスパート活動　B

例として　$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ を考えよう。

　　$S=\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ とおき，和を具体的に書き出すと

① S　=　$\boxed{1 \cdot 1+2 \cdot 2+3 \cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1) \cdot 2^{n-2}+n \cdot 2^{n-1}}$　となる。

ここで，

　各項の左側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公差 $\boxed{}$ の等差数列

　各項の右側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公比 $\boxed{}$ の等比数列となっていることが分かる。

数列全体として，等差数列または等比数列をなしてはいないが，

このような数列の和を『**（等差）×（等比）の数列の和**』と呼ぶこととする。

右側にある等比数列について注目してみる。

一般項は 2^{n-1} なので，等比数列の和の公式より

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{1 \cdot (2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$ 　となる。

このように，公式を利用することで和を求められるようになることは重要なことである。

等比数列の和の公式にある，本質について復習しよう。⟹　裏面へ続く

エキスパート活動　B

初項１，公比２の等比数列の，初項から第 n 項までの和を S とすると

$$S = 1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}$$ となる。

両辺に公比である 2 をかけて，辺々引くと（右辺はずらして引くと）

はみ出した最後の項の符号はマイナス！

$$\begin{array}{rl} S = & 1+\cancel{2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}} \\ -)\ 2S = & \quad\ \cancel{2+2^2+2^3+\ \cdots\cdots\ +2^{n-1}}+2^n \\ \hline -S = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad -2^n \end{array}$$

打ち消しあった項の個数は

個

Sを求めるので，
両辺÷（－１）をする！

$$S = 2^n-1$$

両辺に公比をかけて，ずらして引くという工夫はとても有効である

初項 a，公比 r の等比数列の，初項から第 n 項までの和 S においても同様に
両辺に公比である r をかけて，辺々引くと（右辺はずらして引くと）

$$\begin{array}{rl} S = & a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \\ -)\ rS = & \quad\ ar+ar^2+ar^3+\ \cdots\cdots\ +ar^{n-1}+ar^n \\ \hline (1-r)S = & a \qquad\qquad\qquad\qquad -ar^n \end{array}$$

よって $1-r \fallingdotseq 0$ つまり $r \fallingdotseq 1$ のとき，両辺 $\div(1-r)$ をして

$$S = \frac{a-ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ が得られる。

エキスパート活動　C

例として　$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ を考えよう。

$S=\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1}$ とおき，和を具体的に書き出すと

①　S　＝ $\boxed{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}}$ となる。

ここで，

各項の左側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公差 $\boxed{}$ の等差数列

各項の右側に注目すると　初項 $\boxed{}$ 公比 $\boxed{}$ の等比数列となっていることが分かる。

数列全体として，等差数列または等比数列をなしてはいないが，

このような数列の和を『**（等差）×（等比）の数列の和**』と呼ぶこととする。

ユークリッドの互除法（数学A 「整数の性質」）の活用において，

『**（※）の部分の変形が分からない**』という声を耳にすることがある。

例　等式 $24x+17y=1$ を満たす整数 x , y の組を 1 つ求めよ。

24 と17 に互除法の計算を行うと

24÷17	より	$24=17\cdot1+7$	移行して	$7=24-17\cdot1$	…　①
17÷7	より	$17=7\cdot2+3$	移行して	$3=17-7\cdot2$	…　②
7÷2	より	$7=3\cdot2+1$	移行して	$1=7-3\cdot2$	…　③

③より　　$1=7-3\cdot2$

②を代入して　　$1=7-(17-7\cdot2)\cdot2$

$1=7\cdot5+17\cdot(-2)$　（※1）

①を代入して　　$1=(24-17\cdot1)\cdot5+17\cdot(-2)$

$1=24\cdot5+17\cdot(-7)$　（※2）

……　解答は続いていく

（※）の部分の変形について考えを深めよう。⟹ 裏面へ続く

（※１）の変形部分について補足をすると

$1=7-(17-7\cdot 2)\cdot 2$　　分配法則より

$1=7-17\cdot 2+7\cdot 4$　　←　　$7+7\cdot 4$

$1=7\cdot 5+17\cdot(-2)$　　　　$=7\cdot 5$　　，$-17\cdot 2=17\cdot(-2)$ より

ここで，

$7+7\cdot 4$
$=7\cdot 5$　　を次のようにみる。**（←ここが理解しにくいようだ）**

$$\begin{array}{rl} & 1\cdot 7 \\ +) & 4\cdot 7 \\ \hline & 5\cdot 7 \end{array}$$

7　…　7 が 1 個あるとみて　$1\cdot 7$

$7\cdot 4$　…　7 が 4 個あるとみて　$4\cdot 7$　　これら縦に表記する。

このように，

ある数が □ 個あるとみて縦に表記したものは，足し算・引き算をしやすい。

（※２）の変形部分について補足をすると

$1=(24-17\cdot 1)\cdot 5+17\cdot(-2)$　　分配法則より

$1=24\cdot 5-17\cdot 5+17\cdot(-2)$　　←　　$-17\cdot 5+17\cdot(-2)$

$1=24\cdot 5+17\cdot(-7)$　　　　$=\ 17\cdot(-7)$　　より

上にならって　$-17\cdot 5+17\cdot(-2)$
$=\ 17\cdot(-7)$　　となることを説明しよう。

$-17\cdot 5$　…　　が　　個　あるとみて

$17\cdot(-2)$　…　　が　　個　あるとみて